

ARTICLE PRINCIPAL

RECOUVRANT EN PARTIE

LA THÈSE DE DOCTORAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PAR

Enrique SANCHEZ-PALENCIA

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

Sujet de la Thèse : SUR L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ DE CERTAINS PROBLÈMES AUX LIMITES
POSÉS PAR LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE

Soutenue le 29 novembre 1969 devant la Commission d'examen

M.	H. CABANNES	<i>Président</i>
M ^{lle}	P. LIBERMANN	<i>Examineur</i>
MM.	P. A. RAVIART	<i>Rapporteur</i>
	J. L. LIONS	<i>Membre invité</i>

GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR

55, quai des Grands-Augustins, Paris 6^e

1970



Quelques résultats d'existence et d'unicité pour des écoulements magnétohydrodynamiques non stationnaires *

par

Enrique SANCHEZ-PALENCIA **.

RÉSUMÉ. — Ce travail a pour objet l'étude de l'existence et de l'unicité de certains écoulements magnétohydrodynamiques d'un fluide visqueux incompressible et conducteur de l'électricité. Le fluide, au repos à l'infini, remplit tout l'espace extérieur à un obstacle qui est initialement immobile et animé ensuite d'un mouvement de translation rectiligne non uniforme. Le champ magnétique à l'infini étant imposé et indépendant du temps, l'existence d'une solution faible est démontrée pour le problème aux limites correspondant à un écoulement bi ou tridimensionnel et à un corps conducteur ou isolant. Dans le cas bidimensionnel, l'unicité de la solution et sa continuité par rapport aux données sont également démontrées, ainsi que la propriété suivante : à un instant arbitrairement fixé, les circulations de la vitesse et du champ magnétique le long d'une circonférence tendent vers zéro lorsque le rayon tend vers l'infini.

ABSTRACT. — The existence and uniqueness of certain magnetohydrodynamic flows of a viscous, incompressible and electrically conducting fluid are investigated. The fluid is at rest at large distances from a body in non-uniform translational motion which started from the rest with a constant magnetic field imposed at infinity. The existence of a weak solution of the boundary-value problem is proved for both two- and three-dimensional flows and for both conducting and insulating bodies. In the two-dimensional case, we also prove the uniqueness of the solution and its continuous dependence on the data, as well as the following property : for an arbitrary fixed time, the circulations of the velocity and magnetic fields around a circle tend to zero as the radius tends to infinity.

* Cet article fait partie d'une thèse à présenter à la Faculté des Sciences de Paris.

** Département de Mécanique de la Faculté des Sciences de Paris, et Escuela de Ingenieros Aeronauticos, Ciudad Universitaria, Madrid.

1. Introduction.

Dans le travail qui suit nous étudions l'existence et l'unicité des solutions de certains problèmes aux limites posés par le mouvement accéléré d'un obstacle à l'intérieur d'un fluide conducteur de l'électricité et soumis à l'action d'un champ magnétique extérieur. Le présent article fait donc suite à [1], consacré aux mouvements indépendants du temps, mais les deux travaux peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre. Nous n'étudions, comme la plupart de nos prédécesseurs, que des solutions faibles, qui ne satisfont les équations et conditions aux limites que dans un sens généralisé approprié pour appliquer les techniques de l'analyse fonctionnelle.

Ladyzhenskaya et Solonnikov ([2], [3]) ont été les premiers à étudier l'existence et l'unicité des solutions des problèmes non stationnaires de la magnétohydrodynamique classique. Ils ont étudié, notamment, les problèmes avec conditions aux limites homogènes dans un domaine borné dont l'extérieur est rempli par un solide infiniment conducteur. Citons aussi Aubin [4] qui a amélioré certains résultats de [3]. Lassner [5] a étudié le même type de problèmes mais en imposant à la frontière la nullité du champ magnétique, à la différence de Ladyzhenskaya et Solonnikov, qui n'imposent que la nullité de la composante normale du champ magnétique, condition correspondant à un solide infiniment conducteur. Dans ces conditions, Lassner démontre l'existence et l'unicité de la solution en adoptant une loi d'Ohm non classique : le courant électrique contient un terme supplémentaire indépendant du champ électromagnétique. Il relève aussi, à l'aide d'un contre-exemple, une erreur commise par d'autres auteurs ([6], [7]) qui pensaient avoir résolu le problème en se donnant comme conditions aux limites le champ magnétique nul et en adoptant la loi d'Ohm classique; or, la formulation faible de leurs problèmes correspond, en fait, à la loi d'Ohm de Lassner. Rappelons que la même erreur a été commise dans les problèmes stationnaires (voir [8], [9] et l'introduction de [1]), ce qui n'est pas étonnant, car dans la formulation faible, la condition aux limites de champ nul est associée d'une façon naturelle avec la loi d'Ohm de Lassner, et celle de composante normale nulle, avec la loi classique. Cela explique aussi le fait que les théorèmes d'unicité que l'on a établis sans utiliser la formulation faible ([10]-[13]) portent tous sur la loi d'Ohm classique.

Nous avons repris les équations de la magnétohydrodynamique classique et nous cherchons le champ magnétique dans tout l'espace, occupé par un corps en mouvement au sein d'un fluide, en imposant le champ à l'infini et non pas sur des surfaces à distance finie. Nous accordons un intérêt particulier au cas bidimensionnel, qui n'avait pas été étudié par Ladyzhenskaya et Solonnikov dans un domaine non borné (voir [3], p. 138). Nous avons évité les difficultés rencontrées par ces auteurs en cherchant le champ magnétique dans un espace fonctionnel dont les

éléments jouissent de la propriété que sa circulation le long d'une circonférence tend vers zéro lorsque le rayon tend vers l'infini (en un sens qui sera précisé au paragraphe 8); c'est dans cet espace que nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution, laquelle possède, *a fortiori*, cette propriété. On peut se demander ce qui se passerait si l'on cherchait la solution dans un espace dont les éléments ne satisferaient pas, en général, la propriété citée. Évidemment, l'existence resterait toujours acquise, mais l'unicité serait, éventuellement, perdue. Cette question du choix de l'espace se pose dans tous les cas où l'on travaille avec des solutions faibles, et nous remarquons toutefois, que notre travail est en accord avec le critère qui veut qu'un bon espace est celui où l'existence et l'unicité ([14], p. 150) peuvent être démontrées.

Nous formulons au paragraphe 2 le problème aux limites à résoudre pour l'écoulement bidimensionnel d'un fluide conducteur en repos à l'infini autour d'un corps isolant en mouvement de translation non uniforme. Au paragraphe 3 nous étudions les propriétés de certains espaces fonctionnels dont on a besoin par la suite. Le paragraphe 4 est consacré à la formulation faible ou généralisée du problème; l'appartenance de la solution à un espace fonctionnel et la vérification d'une identité intégrale remplacent les conditions aux limites et les équations. L'équivalence des formulations classique et faible d'ailleurs démontrée sous la condition que les solutions soient suffisamment régulières. L'existence et l'unicité d'une solution faible sont démontrées aux paragraphes 5 et 6 respectivement, en suivant les idées développées par Lions et Prodi ([15], [16]), pour un problème d'hydrodynamique (approximations de Galerkin et passage à la limite par un raisonnement de compacité). Nous démontrons au paragraphe 7 un résultat de continuité par rapport aux données; avec des définitions appropriées de l'existence et de l'unicité, et un choix convenable des données on peut donc dire que le problème est bien posé au sens d'Hadamard. Au paragraphe 8 nous établissons la propriété de circulation citée ci-dessus. Certains problèmes voisins du précédent (corps conducteur, écoulement tridimensionnel et cas de nombre de Reynolds magnétique nul) sont traités aux paragraphes 9, 10 et 11, où nous n'explicitons que les résultats et quelques-unes des modifications à introduire dans les développements des paragraphes 2-8 pour les adapter aux nouveaux cas. Finalement, au paragraphe 12, nous faisons quelques remarques finales et des comparaisons avec les résultats d'autres auteurs.

Le résultat principal de cet article a été énoncé dans la Note [17].

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous les travailleurs scientifiques du Service de Mécanique théorique de la Faculté des Sciences de Paris qui m'ont apporté leur aide, et, d'une façon tout à fait spéciale, à M. H. Cabannes, qui a orienté, dirigé et encouragé constamment mon travail.

2. Énoncé du problème.

2.1. GÉNÉRALITÉS ET NOTATIONS.

Tous les processus que l'on va considérer dans les paragraphes 2-9 sont bidimensionnels; la vitesse et le champ magnétique sont parallèles à un plan Ox_1x_2 , tandis que le champ et le courant électrique sont normaux à ce plan. Toutes les variables sont indépendantes de la coordonnée x_3 orthogonale à Ox_1x_2 . La perméabilité magnétique de tous les matériaux sera supposée égale à celle du vide, et il n'y aura donc pas de phénomènes de polarisation.

Considérons un fluide visqueux, incompressible et conducteur de l'électricité, au repos, remplissant tout l'espace extérieur à un corps C non conducteur de l'électricité et non chargé. Supposons qu'une certaine action extérieure impose un champ magnétique $\mathbf{H}_\infty$; si le corps est au repos, le champ magnétique en tout point et instant est $\mathbf{H}_\infty$. Dans ces conditions, qui seront considérées comme initiales, le corps C se met en mouvement de translation avec une vitesse $\theta(t)$ fonction du temps une fois continûment différentiable, nulle pour $t = 0$. Le problème consiste à étudier l'écoulement magnétohydrodynamique qui s'établit autour du corps. On verra par la suite que toute la théorie développée est applicable à d'autres cas où l'état initial n'est pas celui du repos.

Naturellement, nous avons intérêt, pour rendre les domaines de définition des inconnues indépendants du temps, à étudier le problème dans un repère orthogonal non galiléen Ox_1x_2 lié au corps C . Nous prendrons l'axe x_1 dans la direction du déplacement de C , et nous noterons $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ les vecteurs unitaires des directions Ox_1 , Ox_2 et de la normale au plan de l'écoulement. Le vecteur unitaire de la direction du champ magnétique initial (et du champ magnétique à l'infini en tout instant) sera désigné par $\mathbf{b}$.

La frontière du corps, le domaine rempli par le fluide et l'espace bidimensionnel tout entier seront notés Γ , Ω , $\mathbb{R}^2$ respectivement.

Nous désignerons par B_r la boule de rayon r centrée à l'origine.

Si F est un domaine borné, ∂F désignera sa frontière. Cette même notation sera éventuellement appliquée à un domaine non borné; elle aura alors une signification de limite évidente.

$\mathbf{v}$ étant un vecteur, nous noterons v_t sa (ses, dans le cas tridimensionnel) composante tangentielle à une surface.

Étant donné une fonction f , nous noterons son support $\text{supp } f$, et $f|_\omega$ désignera la restriction de f à la région de l'espace ω .

Les éléments d'aire et d'arc (de volume et surface dans le cas tridimensionnel) seront notés $d\Omega$ et dS .

On emploiera la convention des indices répétés.

Soient $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, p une vitesse, un champ magnétique, un champ électrique et une pression adimensionnalisées. Désignons par R le nombre de Reynolds classique, par R_m le nombre de Reynolds magnétique et par α le rapport du nombre de Reynolds au carré du nombre d'Alfvén. Tous ces nombres adimensionnels sont des constantes définies par (1), où v_0 est une vitesse caractéristique du mouvement du corps, H_∞ l'intensité du champ magnétique imposé à l'infini; a désigne une longueur caractéristique du corps et ν , μ , σ et ρ sont respectivement la viscosité cinématique, la perméabilité magnétique, la conductibilité électrique et la densité du fluide :

$$(1) \quad R = \frac{v_0 a}{\nu}; \quad R_m = v_0 a \sigma \mu; \quad \alpha = \frac{\mu H_\infty^2 a}{\sigma v_0 \nu}.$$

2.2. LE PROBLÈME AUX LIMITES.

D'après les considérations de l'appendice (§ 13), les équations dans le repère lié au corps sont les mêmes que dans un repère galiléen, à une modification de la pression près.

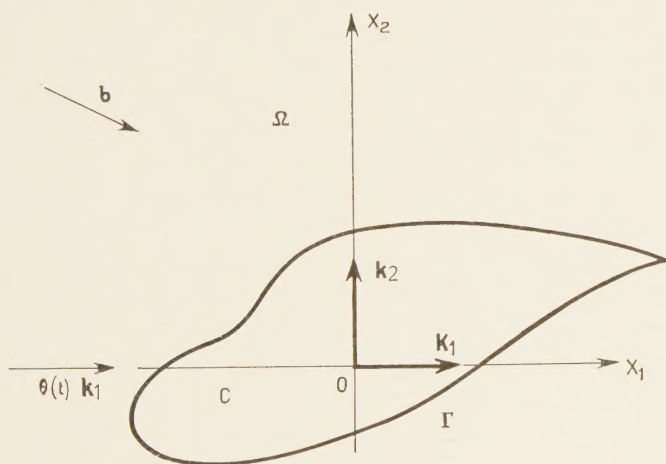


Fig. 1.

On cherche donc à déterminer pour $t > 0$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$, p , $\mathbf{E}$ dans Ω satisfaisant les équations générales de la magnétohydrodynamique ([18], (2)-(6)) et dans le domaine C , $\mathbf{H}$ et $\mathbf{E}$, vérifiant les équations (7)-(9), cas particulier des précédentes pour un solide isolant. Notons que $\mathbf{E} = E(x_1, x_2) \mathbf{k}_3$ et que la condition $\text{div} \mathbf{E} = 0$ qui exprime le fait que le corps n'est pas électriquement chargé, est automatiquement satisfaite. Les conditions à imposer à l'infini sont (10), (11) (la vitesse et le champ magnétique sont

donnés à l'infini) et (12), que nous tenons à expliciter bien qu'elle soit une conséquence de (11); elle exprime le fait que le courant électrique, qui est une perturbation produite par le mouvement du corps, s'annule à l'infini.

(10)-(12) donnent implicitement, compte tenu de (5), des conditions à l'infini pour $\mathbf{E}$. A la frontière Γ du corps on aura (13) (le fluide adhère à la paroi), (14) (le champ magnétique est continu à la traversée de la surface de séparation entre deux milieux de même perméabilité) et (15) (le champ électrique, qui est tangentiel en vertu du caractère bidimensionnel du problème, n'a pas de discontinuité à la surface). Les conditions initiales sont (16); comme on verra par la suite, elles déterminent d'une façon unique la solution du problème et donc, en particulier, les valeurs initiales de $\mathbf{E}$ et p (voir la remarque du paragraphe 4.2); typiquement on aura $\mathbf{v}_0 = 0$, $\mathbf{H}_0 = \mathbf{b}$:

$$\begin{array}{ll}
 (2) & \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\
 (3) & \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \\
 (4) & -R \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Delta \mathbf{v} - R(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} + \alpha \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = \operatorname{grad} p^* \\
 (5) & \operatorname{rot} \mathbf{H} = R_m(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) \\
 (6) & \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T} \\
 (7) & \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \\
 (8) & \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \\
 (9) & \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T} \\
 (10) & \mathbf{v}|_{\infty} = \theta(t) \mathbf{k}_t \\
 (11) & \mathbf{H}|_{\infty} = \mathbf{b} \\
 (12) & \operatorname{rot} \mathbf{H}|_{\infty} = 0 \\
 (13) & \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0 \\
 (14) & \mathbf{H}|_{\Gamma} = \text{continu} \\
 (15) & \mathbf{E}|_{\Gamma} = \text{continu} \\
 (16) & \left. \begin{array}{l} \mathbf{v}|_{T=0} = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{H}|_{T=0} = \mathbf{H}_0 \end{array} \right\} \text{ pour } t = 0.
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dans } \Omega, \\ \\ \\ \\ \text{dans } C, \\ \\ \text{à l'infini,} \\ \text{sur } \Gamma, \end{array}$$

Construisons la fonction auxiliaire $\mathbf{a} = \mathbf{k}_t + \mathbf{e}$ satisfaisant (17) définie dans Ω que l'on peut construire immédiatement à l'aide de la fonction de courant, et introduisons les nouvelles inconnues $\mathbf{u}$ et $\mathbf{h}$, définies par (18) à la place de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{H}$. Les conditions à l'infini (19) et sur Γ (20) qui remplacent (10)-(15) sont homogènes, et les fonctions qui les satisfont forment donc espace vectoriel. Quant aux équations (2)-(9) et (16), nous

supposerons dorénavant qu'elles sont exprimées, au besoin, en fonction de $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$ ou de $\mathbf{u}$, $\mathbf{h}$, liées par (18) :

$$(17) \quad \begin{cases} \mathbf{a}(x_1, x_2) = \mathbf{k}_1 + \mathbf{e}(x_1, x_2), \\ \operatorname{div} \mathbf{e} = 0 \\ \mathbf{e}|_{\text{voisinage de } \Gamma} = -\mathbf{k}_1, \\ \mathbf{e}|_{\text{voisinage de l'infini}} = 0; \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} \mathbf{h} = \mathbf{H} - \mathbf{b}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{v} - \theta(t) \mathbf{a}; \end{cases}$$

$$(19) \quad \mathbf{u}|_{\infty} = \mathbf{h}|_{\infty} = \operatorname{rot} \mathbf{h}|_{\infty} = 0;$$

$$(20) \quad \mathbf{u}|_{\Gamma} = 0; \quad \mathbf{h} \text{ et } \mathbf{E} \text{ sont continus sur } \Gamma.$$

3. Espaces et formes fonctionnels.

3.1. GÉNÉRALITÉS.

Si F est un domaine, borné ou non, l'espace des fonctions scalaires f (resp. vectorielles $\mathbf{w}$) à puissance $p^{\text{ième}}$ sommable dans F sera noté $L_p(F)$ [resp. $\mathbf{L}_p(F)$]. Sa norme est donnée par (21). L'espace des fonctions scalaires à carré sommable et possédant des dérivées premières à carré sommable dans F sera désigné par $W_2^1(F)$, muni de la norme (22). Si E désigne un espace de Banach, on notera $L_p(a, b; E)$ l'espace des fonctions à puissance $p^{\text{ième}}$ sommable sur l'intervalle (a, b) , à valeurs dans E . Sa norme est donnée par (23) :

$$(21) \quad \|f\|_p = \left(\int_F |f|^p d\Omega \right)^{\frac{1}{p}}; \quad \|\mathbf{w}\|_F = \left(\int_F \sum_k |\mathbf{w}_k|^p d\Omega \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$(22) \quad \|f\|_{1,2} = \left(\|f\|_2^2 + \sum_k \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(23) \quad \left(\int_a^b \|u\|_E^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Rappelons la décomposition orthogonale bien connue ([14], chap. 1, § 2) de l'espace $L_2(F)$.

LEMME 1. — *L'espace de Hilbert $L_2(F)$ se décompose en deux sous-espaces orthogonaux dont l'un est l'ensemble des éléments de la forme $\operatorname{grad} \varphi$ où φ est une fonction uniforme, localement à carré sommable et avec dérivées premières à carré sommable, et l'autre est le complété par la norme de $L_2(F)$ de l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables, à divergence nulle et support compact dans F .*

3.2. LES ENSEMBLES $J(\Omega)$, $J_1(\Omega)$, $J_2(\Omega)$.

Nous désignons par $J_1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions vectorielles $\mathbf{w}$ indéfiniment dérivables, à divergence nulle et support compact dans Ω . $J_2(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions ψ définies dans $\mathbb{R}^2$ par la loi de Biot-Savart bidimensionnelle (24) où γ est une fonction scalaire, indéfiniment dérivable à support compact dans Ω et satisfaisant la condition (25). [Physiquement $J_2(\Omega)$ est l'ensemble des champs magnétiques produits par les courants électriques qui traversent Ω et dont le flux total est nul.] :

$$(24) \quad \psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\gamma(\mathbf{r}_2) \mathbf{k}_3 \wedge (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} d\Omega_2,$$

$$(25) \quad \int_{\Omega} \gamma d\Omega = 0.$$

L'ensemble des couples $\mathbf{w}$, ψ , où $\mathbf{w} \in J_1(\Omega)$, $\psi \in J_2(\Omega)$ sera désigné par $J(\Omega)$. Évidemment si $\psi \in J_2(\Omega)$ on a (26). Étudions maintenant quelques propriétés de comportement à l'infini de ψ . Soit Γ^* un contour simple entourant $\text{supp. rot } \psi$; en appliquant alors le théorème de Green (resp. Stokes) on démontre, à l'aide de (26), que le flux de ψ à travers Γ^* (resp. la circulation de ψ le long de Γ^*) est nul (resp. nulle). En dehors du $\text{supp. rot } \psi$, ψ est le gradient d'une fonction harmonique, et l'on en peut construire le potentiel complexe $f(z)$ ($z = x_1 + ix_2$). Or, les propriétés que l'on vient de démontrer expriment le fait que les parties réelle et imaginaire de f sont uniformes; f peut donc être développée en série de Laurent dans un voisinage de l'infini entourant $\text{supp. rot } \psi$, et l'on a (27), mais ψ tend manifestement vers zéro à l'infini, et donc tous les coefficients des puissances non négatives sont nuls et l'on obtient (28), d'où (29). Signalons que la condition (25), qui est étroitement liée à la propriété de circulation citée à l'introduction est nécessaire pour établir (29), et donc pour munir $J_2(\Omega)$ du produit scalaire de L_2 , ce qui est fondamental par la suite. L'idée d'introduire la condition (25) nous est venue du fait que, dans le cas particulier de symétrie par rapport à l'axe x_1 , où elle est automatiquement satisfaite, la démonstration pouvait être développée.

$$(26) \quad \text{div } \psi = 0; \quad \text{rot } \psi = \gamma \mathbf{k}_3;$$

$$(27) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n; \quad \psi \text{ conj} = \sum_{n \neq 0} n z^{n-1} a^n;$$

$$(28) \quad \begin{cases} \psi \text{ décroît à l'infini comme } r^{-2}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad \text{«} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad r^{-3}; \end{cases}$$

$$(29) \quad \psi \in L_2(\mathbb{R}^2).$$

Nous démontrons, comme dans le lemme 2 de [1] l'inclusion (30) et l'identité (31), valable pour ψ et $\mathbf{h} \in J_2(\Omega)$; par passage à la limite, elle a

lieu encore pour ψ et $\mathbf{h}$ éléments de l'espace $V_2(\Omega)$ que l'on définira après. La majoration (32) où h_i est une composante de $\mathbf{h} \in J_2(\Omega)$ [ou $V_2(\Omega)$] se démontre comme dans le cas particulier de ([14], p. 10), compte tenu du fait que (28) permet de passer à la limite à l'infini :

$$(30) \quad J_1(\Omega) \subset J_2(\Omega),$$

$$(31) \quad \int_{R_2} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} d\Omega = \int_{R_2} \mathbf{rot} \mathbf{h} \cdot \mathbf{rot} \psi d\Omega,$$

$$(32) \quad \int_{R_2} h_i^4 d\Omega \leq 2 \int_{R_2} h_i^2 d\Omega \int_{R_2} (\text{grad } h_i)^2 d\Omega.$$

3.3. LES ESPACES H_1 , H_2 , H , V_1 , V_2 , V .

Nous définissons sur l'ensemble $J(\Omega)$ [resp. $J_1(\Omega)$ et $J_2(\Omega)$] le produit scalaire (33) et nous désignons $H(\Omega)$ [resp. $H_1(\Omega)$, $H_2(\Omega)$] le complété de $J(\Omega)$ [resp. $J_1(\Omega)$, $J_2(\Omega)$] :

$$(33) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{h}, \mathbf{w}, \psi)_{\text{II}} = R(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{\text{II}} + \alpha(\mathbf{h}, \psi)_{\text{II}_2} \equiv R \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} d\Omega + \alpha \int_{R_1} \mathbf{h} \cdot \psi d\Omega.$$

Nous définirons encore sur les mêmes espaces les produits scalaires (34) et (35) et nous noterons $V(\Omega)$ [resp. $V_1(\Omega)$, $V_2(\Omega)$] les espaces complétés de $J(\Omega)$ [resp. $J_1(\Omega)$, $J_2(\Omega)$] pour les produits scalaires de (35). Remarquons que le carré de la norme (33) d'un élément $\mathbf{w}, \psi$ [resp. (34)] est, à des facteurs numériques près, la somme de l'énergie cinétique de $\mathbf{w}$ et magnétique de $\mathbf{h}$ (resp. puissance dissipée par viscosité dans l'écoulement $\mathbf{w}$ et par résistivité dans le champ ψ) :

$$(34) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi)_{\text{I}} = (\mathbf{u}, \mathbf{h})_{\text{I}_1} + \frac{\alpha}{R_m} (\mathbf{h}, \psi)_{\text{I}_2} \\ = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} d\Omega + \frac{\alpha}{R_m} \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{h} \cdot \mathbf{rot} \psi d\Omega,$$

$$(35) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi)_{\text{V}} = (\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi)_{\text{II}} + (\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi)_{\text{I}} \\ = [R(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{\text{II}} + (\mathbf{u}, \mathbf{w})_{\text{I}_1}] + \left[\alpha(\mathbf{h}, \psi)_{\text{II}_2} + \frac{\alpha}{R_m} (\mathbf{h}, \psi)_{\text{I}_2} \right] \\ = (\mathbf{u}, \mathbf{h})_{\text{V}_1} + (\mathbf{h}, \psi)_{\text{V}_2}.$$

Les notions des produits scalaires seront, au besoin, appliquées à des vecteurs n'appartenant pas aux espaces correspondants; dans ce cas, elles désigneront les intégrales de (33) et (34). Considérons maintenant $\mathbf{u}, \mathbf{h} \in V(\Omega)$; toutes les intégrales de (33) et (34) sont finies, et les conditions (19) sont donc satisfaites en un sens généralisé. D'autre part, (31) et (35) montrent que chaque composante de $\mathbf{u}$ ou $\mathbf{h}$ appartient localement à l'espace W_1^1 , et par conséquent les deux premières conditions (20) sont satisfaites au sens des traces ([19], chap. 2, § 4.2), pour la même raison,

les conditions de divergence ou rotationnel nuls des fonctions de $J(\Omega)$ sont conservées par passage à la limite dans $V(\Omega)$, et on a le lemme suivant :

LEMME 2. — *Si le couple de fonctions $\mathbf{u}, \mathbf{h}$ appartient à $V(\Omega)$, ces deux fonctions satisfont les équations (2), (3), (7), (8) et, dans un sens généralisé, (19) et les deux premières conditions (20).*

3.4. LES FORMES L ET N .

Nous définirons les deux formes L_0 et L_{τ_1} par (36); compte tenu du fait que $\mathbf{a}$ et $\mathbf{e}$ sont des fonctions données bornées, L_0 et L_{τ_1} sont bilinéaires sur $V(\Omega) \times V(\Omega)$; en plus, on a évidemment (37), où K désigne une constante :

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_0(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi) = R \int_{\Omega} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{e}] \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\ \quad - \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{h}) \cdot \mathbf{rot} \, \psi \, d\Omega, \\ L_{\tau_1}(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi) = -\alpha \int_{\Omega} [(\mathbf{rot} \, \mathbf{h} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{w} + (\mathbf{u} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{rot} \, \psi] \, d\Omega; \end{array} \right.$$

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_0(\mathbf{w}, \psi; \mathbf{w}, \psi) \leq K (\|\mathbf{w}, \psi\|_{11} \|\mathbf{w}, \psi\|_1 + \|\mathbf{w}, \psi\|_0^2), \\ L_{\tau_1}(\mathbf{w}, \psi; \mathbf{w}, \psi) \leq K \|\mathbf{w}, \psi\|_{11} \|\mathbf{w}, \psi\|_1. \end{array} \right.$$

Considérons aussi la forme trilinéaire (38); par application de l'inégalité de Cauchy et de (32) on a (39), et donc N est trilinéaire sur $V(\Omega)$. En faisant $\mathbf{u}, \mathbf{h} = \mathbf{v}$, $\mathbf{H} = \mathbf{w}$, $\psi \in J(\Omega)$ nous trouvons (40), d'où (41) qui reste valable, par passage à la limite, pour $\mathbf{w}, \psi \in V(\Omega)$:

$$(38) \quad N(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{v}, \mathbf{H}; \mathbf{w}, \psi) = R \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\ - \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \, \mathbf{h} \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{rot} \, \psi \, d\Omega,$$

$$(39) \quad |N(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{v}, \mathbf{H}; \mathbf{w}, \psi)| \\ \leq K (\|\mathbf{v}\|_{11} \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1 + \|\mathbf{h}\|_{12} \|\mathbf{H}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1 + \|\psi\|_{12} \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{H}\|_1) \\ \leq K_1 \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_V \|\mathbf{v}, \mathbf{H}\|_V \|\mathbf{w}, \psi\|_V,$$

$$(40) \quad \int_{\Omega} [(\mathbf{w} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{w}] \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_i \frac{dw^2}{dx_i} \, d\Omega \\ = \frac{1}{2} \int_{\rho_{\sup} \mathbf{w}} n_i w_i w^2 \, dS = 0,$$

$$(41) \quad N(\mathbf{w}, \psi; \mathbf{w}, \psi; \mathbf{w}, \psi) = 0, \quad \forall \mathbf{w}, \psi \in V(\Omega).$$

4. Formulation faible du problème.

4.1. IDENTITÉ INTÉGRALE PRÉLIMINAIRE.

Soit $\mathbf{v}, \mathbf{H}, p, \mathbf{E}$ une solution classique du problème que nous supposons suffisamment régulière. Nous supposons également que $\mathbf{v}$ et $\mathbf{H}$ tendent

vers leurs limites à l'infini au moins comme $r^{-\varepsilon}$, ε positif quelconque, et soit $\mathbf{w}, \psi$ une fonction-test appartenant à $J(\Omega)$. Les équations (2)-(9) et (19) et (20) sont satisfaites par la solution. Si nous multiplions (4) par $-\mathbf{w}$ et (5) par $\frac{\alpha}{R_m} \mathbf{rot} \psi$ et nous intégrons sur Ω , le terme en $\mathbf{grad} p$ s'annule en vertu du lemme 1, et, après avoir intégré par parties le terme en $\Delta \mathbf{u}$, nous avons

$$(42) \quad R \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \mathbf{w} \right)_{H_1} + (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{L_1} + \frac{\alpha}{R_m} (\mathbf{H}, \psi)_{L_2} + N(\mathbf{v}, \mathbf{H}; \mathbf{v}, \mathbf{H}; \mathbf{w}, \psi) \\ = \alpha \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \psi \, d\Omega.$$

Transformons certains termes de (42) pour éliminer le champ électrique et ramener certains termes à des produits scalaires dans L_2 . Intégrons par parties le second membre de (42); nous obtenons alors (43), en tenant compte du fait que l'intégrale de contour s'annule en vertu de (28) et du fait que $\mathbf{E}$ a une limite finie à l'infini [puisqu'il résulte de (5), (10), (11) et (12), $\mathbf{E}|_{\infty} = -\eta(t) \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{b}$] et en tenant compte aussi de (6) et (9). Nous établissons aussi (44); la première égalité est valable car $\mathbf{rot} \psi$ est nul sur C , nous supposons $\mathbf{e}$ prolongé par $-\mathbf{k}_1$ dans C , et l'intégrale de contour s'annule car $\mathbf{e}$ est nul en dehors de son support. L'égalité (45) a lieu en vertu de (25), et (17), compte tenu du fait que $\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{b}$ est constant. Finalement, le lemme 1 nous permet d'écrire (46), et (42) s'écrit alors sous la forme (47) :

$$(43) \quad \alpha \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \psi \, d\Omega = \alpha \int_{R_2} \varepsilon_{ijk} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{E}_i \psi_k) - \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial x_j} \psi_i \right] d\Omega \\ = \alpha \int_{\partial R_2} \varepsilon_{ijk} n_j \mathbf{E}_i \psi_k \, dS + \alpha \int_{R_2} \varepsilon_{kij} \psi_k \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial x_j} d\Omega \\ = \alpha \int_{R_2} \psi \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E} \, d\Omega \\ = \alpha \int_{R_2} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \cdot \psi \, d\Omega,$$

$$(44) \quad \int_{\Omega} (\mathbf{e} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{rot} \psi \, d\Omega = \int_{R_2} \varepsilon_{ij3} (\mathbf{e} \wedge \mathbf{b})_3 \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} d\Omega \\ = \int_{R_2} \varepsilon_{ij3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} [(\mathbf{e} \wedge \mathbf{b})_3 \psi_j] - \frac{\partial (\mathbf{e} \wedge \mathbf{b})_3}{\partial x_i} \psi_j \right\} d\Omega \\ = \int_{\partial \text{supp } \mathbf{e}} \varepsilon_{ij3} (\mathbf{e} \wedge \mathbf{b})_3 \psi_j n_i \, dS + \int_{R_2} \varepsilon_{jil3} \frac{\partial (\mathbf{e} \wedge \mathbf{b})_3}{\partial x_i} \psi_j \, d\Omega \\ = \int_{R_2} \mathbf{rot} (\mathbf{e} \wedge \mathbf{b}) \cdot \psi \, d\Omega.$$

$$(45) \quad \int_{\Omega} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{rot} \psi \, d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{e} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{rot} \psi \, d\Omega,$$

$$(46) \quad \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{grad} x_1 \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{R_2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega,$$

$$\begin{aligned}
(47) \quad & \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial t}; \mathbf{w}, \Psi \right)_{\Pi} + (\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \Psi)_{\text{I}} + \text{N}(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \Psi) \\
& + \theta(t) \text{L}_0(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \Psi) + \text{L}_{\tau_1}(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \Psi) \\
& = -\text{R} \theta'(t) \int_{\text{R}_2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\
& - \theta(t) \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \, d\Omega - \text{R} \theta^2(t) \int_{\Omega} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{e}] \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\
& + \alpha \theta(t) \int_{\Omega} \mathbf{rot}(\mathbf{e} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{h} \, d\Omega.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties et en tenant compte de (17) et (20), nous écrivons (47 bis) que nous introduisons dans (47). En appliquant alors l'inégalité de Cauchy à chacune des intégrales du second membre de (47), on voit que ces intégrales sont toutes majorées par des constantes multipliées par $\|\mathbf{w}, \Psi\|_{\Pi}$, et donc qu'elles sont des fonctionnelles linéaires et bornées sur $\text{H}(\Omega)$. En vertu du théorème de Riesz, il existe alors f_i , g_i ($i = 1, 2, 3$) élément de $\text{H}(\Omega)$ tel que (47) devient (48) :

$$\begin{aligned}
(47 \text{ bis}) \quad & \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_k} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta \mathbf{e} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega, \\
(48) \quad & \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \text{T}}, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \text{T}}; \mathbf{w}, \Psi \right)_{\Pi} + (\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \Psi)_{\text{I}} + \text{N}(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \Psi) \\
& + \theta(t) \text{L}_0(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \Psi) + \text{L}_{\tau_1}(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \Psi) \\
& = \theta'(t) (\mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1; \mathbf{w}, \Psi)_{\Pi} + \theta(t) (\mathbf{f}_2, \mathbf{g}_2; \mathbf{w}, \Psi)_{\Pi} \\
& + \theta^2(t) (\mathbf{f}_3, \mathbf{g}_3; \mathbf{w}, \Psi)_{\Pi}.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\mathbf{w}, \Psi$ soit une fonction-test dépendante du temps, à valeurs dans $\text{J}(\Omega)$, indéfiniment dérivable, définie pour $t \geq 0$ et nulle pour t suffisamment grand. Écrivons alors l'identité (49), dont les permutations de l'ordre des intégrations et les intégrations par parties sont licites d'après les hypothèses faites sur la régularité de la solution. Définissons aussi $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ par (50); $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ est manifestement un élément de $\text{L}_2(0, \text{T}; \text{H}(\Omega))$ pour tout T fini :

$$\begin{aligned}
(49) \quad & \int_0^\infty \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \text{T}}, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \text{T}}; \mathbf{w}, \Psi \right)_{\Pi} dt \\
& = \int_{\text{R}_2} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \text{T}} (\text{R} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \alpha \mathbf{h} \cdot \Psi) \, dt \, d\Omega \\
& - \int_0^\infty \int_{\text{R}_2} \left(\text{R} \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \text{T}} + \alpha \mathbf{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \text{T}} \right) \, d\Omega \, dt \\
& = -(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \Psi)_{\Pi} \Big|_{\text{T}=0} - \int_0^\infty \left(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \frac{\partial \Psi}{\partial \text{T}} \right)_{\Pi} dt; \\
(50) \quad & \begin{cases} \mathbf{f} = \theta'(t) \mathbf{f}_1 + \theta(t) \mathbf{f}_2 + \theta^2(t) \mathbf{f}_3, \\ \mathbf{g} = \theta(t) \mathbf{g}_1 + \theta(t) \mathbf{g}_2 + \theta^2(t) \mathbf{g}_3. \end{cases}
\end{aligned}$$

A chaque instant t , $\mathbf{w}$ et ψ sont tels que (48) est satisfaite pour elle, en intégrant alors (48), et en tenant compte de (49) et (50), nous obtenons l'identité (51) pour les fonctions test de la forme indiquée. Un passage à la limite, immédiat d'après (37) et (39) montre que (51) est encore vérifiée par des fonctions-test de la forme plus générale indiquée dans le lemme suivant :

LEMME 3. — *Sous les hypothèses de régularité faites pour la solution $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, p cette solution satisfait l'identité intégrale (51) pour toute fonction-test $\mathbf{w}$, ψ définie pour $t \geq 0$, nulle pour t suffisamment grand, à valeurs dans $V(\Omega)$, continue et avec dérivée première contenue dans $L_2(0, \infty; H(\Omega))$.*

$$\begin{aligned}
 (51) \quad & - \int_0^\infty \left(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial T}, \frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_H dt + \int_0^\infty (\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi)_I dt \\
 & + \int_0^\infty N(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi) dt + \int_0^\infty \theta(t) L_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi) dt \\
 & + \int_0^\infty L_\eta(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi) dt \\
 = & \int_0^\infty (\mathbf{f}, \mathbf{g}; \mathbf{w}, \psi) dt + (\mathbf{u}_0, \mathbf{h}_0; \mathbf{w}(0), \psi(0))_H.
 \end{aligned}$$

4.2. DÉFINITION DE SOLUTION FAIBLE ET JUSTIFICATION.

Nous donnons *a priori* la définition suivante :

Nous appellerons *solution faible* du problème proposé un couple de fonctions $\mathbf{u}$, $\mathbf{h}$ appartenant à $L_2(0, T; V(\Omega))$ et $L_\infty(0, T; H(\Omega))$ pour tout T fini et satisfaisant l'identité (51) pour toute fonction-test $\mathbf{w}$, ψ de la classe définie au lemme 3.

Une solution classique, c'est-à-dire suffisamment régulière (ce qui comprend des propriétés locales de continuité et des conditions de décroissance à l'infini) est, d'après les considérations du paragraphe précédent, une solution faible. D'après un critère souvent appliqué lorsqu'on cherche à résoudre un problème par les techniques de l'analyse fonctionnelle, la formulation faible sera valable si l'on démontre qu'une solution faible, jouissant, en plus, de propriétés de continuité appropriées, est une solution classique. Une telle démonstration est l'objet de la suite de ce paragraphe.

Soit $\mathbf{u}$, $\mathbf{h}$ une solution faible deux fois continûment différentiable. Nous allons montrer qu'on peut déterminer d'une façon unique $\text{grad } p^*$ et $\mathbf{E}$ tels que $\mathbf{u}$, $\mathbf{h}$, p , $\mathbf{E}$ soit une solution classique.

Pour les considérations qui suivent, il faut avoir présent le lemme 2.

Écrivons (51) pour $\mathbf{w}$, $\psi = \mathbf{w}^* m(t)$, $\psi^* m(t)$ où $\mathbf{w}^*$, ψ^* est un élément fixe de $V(\Omega)$ et $m(t)$ est une fonction scalaire de la variable t . En intégrant par parties le premier terme de (51), on a (52), que nous remplaçons

dans (51); en prenant pour $m(t)$ une fonction égale à l'unité pour $t = 0$, bornée et nulle pour $t \geq \varepsilon$ et en faisant tendre ε vers zéro, les termes contenant une intégrale s'annulent et on a (53), ce qui montre que la condition initiale (16) est satisfaite :

$$\begin{aligned}
 (52) \quad & - \int_0^\infty (\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}^*, \psi^*)_{\Pi} m'(t) dt \\
 & = \int_0^\infty \frac{d}{dt} (\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}^*, \psi^*)_{\Pi} m(t) dt - [(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}^*, \psi^*)_{\Pi} m(t)]_0^\infty \\
 & = \int_0^\infty \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}; \mathbf{w}^*, \psi^* \right)_{\Pi} m(t) dt + (\mathbf{u}(0), \mathbf{h}(0); \mathbf{w}^*, \psi^*)_{\Pi}, \\
 (53) \quad & (\mathbf{u}(0), \mathbf{h}(0); \mathbf{w}^*, \psi^*)_{\Pi} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{h}_0; \mathbf{w}^*, \psi^*)_{\Pi}.
 \end{aligned}$$

En prenant maintenant $\mathbf{w}, \psi$ de la forme $\mathbf{w}^* m(t), \psi^* m(t)$ (nous supprimerons le signe $*$ par la suite) avec $\mathbf{w}^*, \psi^* \in J(\Omega)$ et $m(t)$ indéfiniment dérivable, à support compact dans $(0, \infty)$, et en intégrant encore par parties le premier terme de (51), cette équation devient l'intégrale de 0 à l'infini du produit de (48) par $m(t)$. Comme $m(t)$ est suffisamment arbitraire, l'équation (48) est satisfaite pour toute valeur de t .

Faisons à présent dans (48), $\mathbf{w} = 0, \psi \in J_2(\Omega)$ arbitraire, compte tenu de (44), (45) et (18), elle devient (54) :

$$\begin{aligned}
 (54) \quad & \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \psi d\Omega + \frac{1}{R_m} \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \psi d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{rot} \psi d\Omega = 0.
 \end{aligned}$$

Construisons maintenant un vecteur $E^*(x_1, x_2, t)$ normal au plan de l'écoulement ($E^* = E^* \mathbf{k}_3$) et satisfaisant (55), où t ne joue que le rôle d'un paramètre. La condition d'intégrabilité de (55) est $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, qui est bien satisfaite, et E^* peut être construite localement par la formule (56), où l'on a fixé arbitrairement la constante additive. En plus, puisque $\mathbf{H}$, et donc sa dérivée par rapport au temps sont continues à la traversée de Γ , l'intégrale (56) donne la même valeur de E^* pour n'importe quel contour d'intégration, même s'il traverse Γ . En plus, il est évident, puisque $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ tend vers zéro à l'infini, que (57) est satisfaite :

$$(55) \quad \mathbf{rot} \mathbf{E}^* = - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial E^*}{\partial x_1} = - \frac{\partial h_2}{\partial t}, \\ \frac{\partial E^*}{\partial x_2} = - \frac{\partial h_1}{\partial t}; \end{cases}$$

$$(56) \quad E^*(B) = \oint_0^B \frac{\partial h_2}{\partial t} dx_1 - \frac{\partial h_1}{\partial t} dx_2;$$

$$(57) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{E^*}{r} = 0.$$

Transformons maintenant le premier terme de (54) à l'aide de $\mathbf{E}^*$. En appliquant le théorème de Gauss, l'intégrale curviligne s'annule à cause de (28) et (57) et on a (58). (54) s'écrit alors sous la forme (59), qui est, en fait, une équation scalaire, car tous les vecteurs sont parallèles à l'axe x_3 . (59) est satisfaite pour toute fonction-test $\mathbf{rot} \psi$ indéfiniment dérivable, à support compact dans Ω et remplissant (60). Soit B un ouvert borné contenu dans Ω . On peut prendre, en particulier, comme fonctions-test celles qui sont nulles en dehors de B . (59) montre alors que la fonction qui apparaît dans son crochet est orthogonale dans $L_2(B)$ à toutes les fonctions indéfiniment dérivables et à support compact qui sont orthogonales à l'unité. Le crochet de (59) est donc une constante dans B . En prenant une suite de bornés B tendant vers Ω on voit que le crochet de (59) est une constante K dans tout Ω [$K = K(t)$ dépend en général de t , qui joue le rôle d'un paramètre]. On a donc (61) dans Ω , et, si l'on définit $\mathbf{E}$ par (62) dans tout R_2 , on voit qu'il satisfait (5), (6), (9) et la troisième des équations (20) :

$$\begin{aligned}
 (58) \quad - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \psi \, d\Omega &= \int_{R_2} \mathbf{rot} \mathbf{E}^* \cdot \psi \, d\Omega \\
 &= \int_{R_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (\mathbf{E}^* \psi_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (\mathbf{E}^* \psi_2) \right] d\Omega \\
 &\quad - \int_{R_2} \mathbf{E}^* \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) d\Omega \\
 &= \int_{\partial R_2} (n_2 \mathbf{E}^* \psi_1 - n_1 \mathbf{E}^* \psi_2) \, dS \\
 &\quad + \int_{R_2} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{rot} \psi \, d\Omega = \int_{R_2} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{rot} \psi \, d\Omega,
 \end{aligned}$$

$$(59) \quad \int_{R_2} \left[\frac{1}{R_m} \mathbf{rot} \mathbf{H} - (\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) - \mathbf{E}^* \right] \cdot \mathbf{rot} \psi \, d\Omega = 0,$$

$$(60) \quad \int_{R_2} \mathbf{rot} \psi \, d\Omega = 0,$$

$$(61) \quad \mathbf{rot} \mathbf{H} - R_m (\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) - R_m \mathbf{E}^* = K(t) \mathbf{k}_3,$$

$$(62) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^* + \frac{K(t)}{R_m} \mathbf{k}_3.$$

Finalement, en faisant dans (48), $\mathbf{w} = 0$, elle devient, après une intégration par parties, (63), où F désigne le premier membre de (4); le lemme 1 montre alors qu'il existe $\mathbf{grad} p^*$ bien déterminé satisfaisant (4). Toutes les équations et conditions aux limites et initiales de la formulation classique sont donc satisfaites par une solution faible suffisamment régulière, et la formulation faible est justifiée.

$$(63) \quad \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0.$$

Remarque. — La formulation faible est une forme du principe des puissances virtuelles; la pression et le champ électrique n'y interviennent pas car leur puissance dans le champ de vitesses virtuelles $\mathbf{w}$, ψ compatibles avec les liaisons, est nulle; ils jouent donc le rôle de forces de liaison et c'est pourquoi leurs valeurs initiales ne peuvent pas être imposées arbitrairement. Il est bien connu en Mécanique analytique ([20], § 7.1.2) que les positions et vitesses initiales des points d'un système holonôme déterminent d'une façon unique son mouvement.

5. Théorème d'existence.

5.1. SOLUTIONS APPROCHÉES DE GALERKIN.

La méthode que nous suivons pour établir l'existence d'une solution faible du problème consiste [15] à définir une suite de solutions approchées par la méthode de Galerkin et à obtenir des estimations *a priori* permettant d'appliquer des théorèmes de compacité pour montrer qu'elles possèdent une limite satisfaisant à la définition de solution faible.

Les espaces $H(\Omega)$ et $V(\Omega)$ sont tous les deux des complétées de l'ensemble $J(\Omega)$ pour deux normes différentes. Il existe donc une base (64) de V et H formée par des éléments de $J(\Omega)$ et orthonormale dans $H(\Omega)$. Nous développons la donnée initiale $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{h}_0$ par rapport à cette base (65). Nous appelons V^m l'espace vectoriel de dimension m engendré par les m premiers éléments de la base :

$$(64) \quad \mathbf{w}^1, \psi^1; \quad \mathbf{w}^2, \psi^2; \quad \dots; \quad \mathbf{w}^m, \psi^m; \quad \dots;$$

$$(65) \quad (\mathbf{u}_0, \mathbf{h}_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^m \gamma_{l0} (\mathbf{w}^l, \psi^l) \quad \text{dans } H \text{ fort.}$$

Nous définissons $\mathbf{u}^m$, $\mathbf{h}^m$, solution approchée d'ordre m comme une fonction de t à valeurs dans V^m [et donc de la forme (66)] satisfaisant (67) [forme approchée de (48)] et la condition initiale (68) [forme approchée de (16)]. La recherche de $\mathbf{u}^m$, $\mathbf{h}^m$ se réduit à celle des m fonctions scalaires $\gamma_l^m(t)$; or (67) équivaut à un système de m équations différentielles ordinaires, chacune desquelles s'obtient en mettant à la place de la fonction-test $\mathbf{w}$, ψ de (67) chacun des m premiers éléments de la base (64); en plus, grâce à l'orthogonalité de la base dans H , le déterminant du système par rapport aux dérivées est égal à l'unité; le système est donc kowalewskiien et, avec les conditions initiales (68), il définit d'une façon unique la solution approchée pour t suffisamment petit. On démontrera tout de suite (72) et donc, en particulier, que les fonctions $\gamma_l^m(t)$ sont bornées pour toutes les valeurs de t pour lesquelles elles sont définies; une simple inspection du théorème d'existence et de prolongement des

solutions des systèmes différentiels [(45), § 151] montre alors que les solutions approchées sont définies pour tout t positif :

$$(66) \quad (\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m) = \sum_{i=1}^m \gamma_i^m(t) (\mathbf{w}_i, \psi_i),$$

$$(67) \quad \left(\frac{\partial \mathbf{u}^m}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{h}^m}{\partial t}; \mathbf{w}, \psi \right)_{\Pi} + (\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{w}, \psi)_I + N(\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{w}, \psi) \\ + \theta(t) L_0(\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{w}, \psi) + L_{\gamma_1}(\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{w}, \psi) \\ = (\mathbf{f}, \mathbf{g}; \mathbf{w}, \psi)_{\Pi}, \quad \forall \mathbf{w}, \psi \in V^m,$$

$$(68) \quad \gamma_i^m(0) = \gamma_{i0}.$$

Pour obtenir des estimations de la solution approchée dans les normes de H et V, nous faisons dans (67) $(\mathbf{w}, \psi) = (\mathbf{w}_i, \psi_i)$; en multipliant par $\gamma_i^m(t)$ et ajoutant le résultat pour $i = 1, 2, \dots, m$, nous obtenons (69). Si nous tenons compte de (41) et (37), nous pouvons obtenir (70) et (71), où K et F(t) représentent une constante et une fonction bien déterminées, indépendantes de m . Si nous négligeons dans (71) le deuxième terme et si nous tenons compte de (65) et (68), nous obtenons l'estimation *a priori* de la norme dans H (72) où $C_1(t)$ est une fonction régulière, indépendante de m . Si nous intégrons maintenant (71) de 0 à t , compte tenu de (72), nous obtenons (73) et, d'après (72), (74), estimation *a priori* de la norme dans V. $C_2(t)$ et $C_3(t)$ représentent des fonctions régulières indépendantes de m :

$$(69) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_{\Pi}^2 + \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_I^2 + N(\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m) \\ + \theta(t) L_0(\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m) + L_{\gamma_1}(\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m) = (\mathbf{f}, \mathbf{g}; \mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m)_{\Pi},$$

$$(70) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_{\Pi}^2 + \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_I^2 \\ \leq \|\mathbf{f}, \mathbf{g}\|_{\Pi} \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_{\Pi} + [1 + \theta(t)] K \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_{\Pi}^2 \\ + \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_{\Pi} \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_I]$$

$$\leq \|\mathbf{f}, \mathbf{g}\|_{\Pi} \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_{\Pi} + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_I^2 \\ + \{K[1 + \theta(t)] + K^2[1 + \theta(t)]^2\} \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_{\Pi}^2.$$

$$(71) \quad \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_{\Pi} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_{\Pi} + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_I^2 \\ \leq \|\mathbf{f}, \mathbf{g}\|_{\Pi} \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_{\Pi} + F(t) \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_{\Pi}^2,$$

$$(72) \quad \|\mathbf{u}^m(t), \mathbf{h}^m(t)\|_{\Pi} \leq C_1(t),$$

$$(73) \quad \int_0^t \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_I^2 d\tau \leq C_2(t),$$

$$(74) \quad \int_0^t \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_V^2 d\tau \leq C_3(t).$$

En suivant [15] nous établissons une estimation des dérivées par rapport à t d'ordre $\gamma \leq \frac{1}{4}$.

Nous supposons que les solutions approchées sont définies nulles pour t négatif; en écrivant alors (67) sous forme de distribution, nous obtenons (75). D'après (37), le second membre de (75) peut être majoré par l'expression (76), où $K(t)$ représente une fonction bien déterminée, régulière et indépendante de m . Le théorème de Riesz montre alors que le second membre de (75) peut être écrit sous la forme (77) où $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{r}(t)$ est, pour t fixé, un élément bien déterminé de V^m ; d'après (75) il est, d'autre part, une somme d'éléments de V^m par des fonctions régulières de t , donc $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{r}(t)$ appartient à $L_2(0, T; V^m)$ pour tout T fini, en plus, d'après (37) et (74) on a (78). Toutes les hypothèses du théorème 3.1 de [15] sont donc satisfaites, et l'on obtient l'estimation *a priori* (79), où $C_5(T)$ ne dépend pas de m ; $q(t)$ est une fonction une fois continûment différentiable, nulle pour $t > T$, le symbole $\mathcal{F}$ représente la transformée de Fourier par rapport à t , et γ est une constante satisfaisant $0 < \gamma < \frac{1}{4}$. On peut dire alors que les dérivées par rapport à t d'ordre fractionnaire γ des solutions approchées restent bornées indépendamment de l'ordre m de l'approximation :

$$(75) \quad D_T(\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{w}, \psi)_{II} + N(\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{w}, \psi) \\ = (\mathbf{u}_0^m, \mathbf{h}_0^m; \mathbf{w}, \psi)_{II} \delta = -\theta(t) L_0(\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{w}, \psi) - L_{T_1}(\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{w}, \psi) \\ + (\mathbf{f}^m, \mathbf{g}^m; \mathbf{w}, \psi)_{II} - (\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m; \mathbf{w}, \psi)_I,$$

$$(76) \quad K(t) \|\mathbf{u}^m, \mathbf{h}^m\|_V \|\mathbf{w}, \psi\|_V,$$

$$(77) \quad (\mathbf{s}(t), \mathbf{r}(t); \mathbf{w}, \psi)_V,$$

$$(78) \quad \int_0^T \|\mathbf{s}(t), \mathbf{r}(t)\|_V^2 dt \leq C_4(T),$$

$$(79) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{2\gamma} \|\mathcal{F}(q\mathbf{u}^m, q\mathbf{h}^m)\|_{II}^2 dt \leq C_5(T).$$

5.2. THÉORÈME D'EXISTENCE.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Le problème aux limites, dans sa formulation faible (définie au paragraphe 4.2) admet au moins une solution $\mathbf{u}$, $\mathbf{h}$. Si $q(t)$ est une fonction une fois continûment différentiable, nulle pour t assez grand, $q\mathbf{u}$, $q\mathbf{h}$ possède, en outre, des dérivées fonctionnelles d'ordre γ ($0 < \gamma < \frac{1}{4}$) dans $H(\Omega)$.*

Pour démontrer ce théorème, considérons le cercle B_r de rayon r centré à l'origine, et faisons la restriction de $\mathbf{u}^m$, $\mathbf{h}^m$ à B_r et à $[0, T]$, T étant arbitrairement choisi. D'après (66) la transformation de Fourier est permutable avec la restriction à B_r ; grâce à (31), (35), (72), (74) chaque

composante de $\mathbf{u}^m$ ou $\mathbf{h}^m$ reste, lorsque m tend vers l'infini, dans un ensemble borné de $L_\infty(0, T; L_2(B_r))$ et de $L_2(0, T; W_2^1(B_r))$. En plus, son produit par $q(t)$ (voir § 5.1) possède une dérivée d'ordre γ , qui reste bornée dans $L_2(-\infty, +\infty; L_2(B_r))$. Comme l'immersion de $W_2^1(B_r)$ dans $L_2(B_r)$ est complètement continue ([23], § 11), en appliquant la proposition 4.2 de ([24], chap. 4, n° 4), on voit que les composantes de $\mathbf{u}^m$ et $\mathbf{h}^m$ restent dans un compact de $L_2(0, T; L_2(B_r)) \equiv L_2(0, T) \times B_r$. On peut alors, d'après la compacité faible d'un borné dans un espace de Hilbert, extraire une sous-suite $\mathbf{u}^n$, $\mathbf{h}^n$ de celle des solutions approchées telle que l'on ait (80), où $\mathbf{u}$, $\mathbf{h}$ est un certain élément de tous les espaces qui interviennent dans (80). En prenant alors une suite de cercles B_r dont le rayon tend vers l'infini, on peut extraire des sous-suites successives correspondantes à chaque couple B_r , T . et un processus de diagonalisation permet encore de prendre une sous-suite telle que, pour elle, (80) ait lieu pour toute B_r et T :

$$(80) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{h} & \text{dans } L_\infty(0, T; H) \text{ faible}^*, \\ \mathbf{u}^n, \mathbf{h}^n \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{h} & \text{dans } L_2(0, T; V) \text{ faible}, \\ \mathbf{u}_i^n, \mathbf{h}_i^n \rightarrow \mathbf{u}_i, \mathbf{h}_i & \text{dans } L_2((0, T) \times B_r) \text{ fort}, \\ D^\gamma(q\mathbf{u}^n, q\mathbf{h}^n) \rightarrow D^\gamma(q\mathbf{u}, q\mathbf{h}) & \text{dans } L_2(-\infty, +\infty; H) \text{ faible}. \end{cases}$$

Nous démontrons à présent que $\mathbf{u}$, $\mathbf{h}$ est une solution faible du problème. Considérons d'abord des fonctions-test de la forme (81), où les $\tau_{ij}(t)$ sont des fonctions continûment différentiables nulles pour $t > T$. En faisant $(\mathbf{w}, \psi) = (\mathbf{w}_i, \psi_i)$ dans (67) en multipliant par $\tau_{ij}(t)$, en ajoutant pour $i = 1, 2, \dots, p$ et en intégrant par rapport au temps de zéro à l'infini, nous constatons que (51) est satisfaite avec $\mathbf{u}^n$, $\mathbf{h}^n$ ($n \rightarrow p$) à la place de $\mathbf{u}$, $\mathbf{h}$ et la fonction-test (81). Passons à la limite $n \rightarrow \infty$. D'après (80) et compte tenu de (37), le passage à la limite est immédiat sauf pour le terme N. Or, $\mathbf{w}$ et $\text{rot } \psi$ ont un support borné fixé, et l'intégrale correspondante porte sur un domaine borné; le raisonnement relatif au cas de l'hydrodynamique [15] reste valable ici; nous le répétons pour l'un des termes nouveaux. La majoration évidente (82), avec (80), montre évidemment que son premier membre tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Finalement, un passage à la limite immédiat permet de passer des fonctions-test de la forme (81) à celles de la définition (§ 4.2) de la solution faible. Le théorème est donc démontré.

$$(81) \quad (\mathbf{w}, \psi) = \sum_i^p \tau_{ij}(t) (\mathbf{w}_j, \psi_j),$$

$$(82) \quad \left| \int_{B_r \times (0, T)} \frac{\partial h_s^n}{\partial x_l} h_k^n w_l d\Omega dt - \int_{B_r \times (0, T)} \frac{\partial h_s}{\partial x_l} h_k w_l d\Omega dt \right| \\ \leq \left| \int_{B_r \times (0, T)} \left(\frac{\partial h_s^n}{\partial x_l} - \frac{\partial h_s}{\partial x_l} \right) h_k w_l d\Omega dt \right| \\ + \left| \int_{B_r \times (0, T)} \frac{\partial h_s^n}{\partial x_l} (h_k^n - h_k) w_l d\Omega dt \right|.$$

6. Théorème d'unicité.

En généralisant la méthode développée par Lions et Prodi dans le cas de l'hydrodynamique classique, nous allons démontrer le théorème 2. L'ensemble des théorèmes 1 et 2 peut être énoncé comme un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible plus une propriété de régularité de la dérivée par rapport au temps.

THÉORÈME 2. — *Le problème aux limites dans sa formulation faible (définie au paragraphe 4.2) admet une solution au plus.*

Nous commençons par définir une nouvelle forme trilinéaire N^* par (83) qui, comme N [voir (39)], est trilinéaire sur V . Si les deux premiers arguments de N et N^* sont égaux, on a l'identité (84); d'après la trilinearité, il suffit d'établir cette égalité pour le cas où les arguments appartiennent à J . D'après l'identité (85), on a, compte tenu du lemme 1, (86); en intégrant par parties, compte tenu du fait que tous les vecteurs qui y interviennent sont à divergence nulle et que $\mathbf{w}$ a support compact dans Ω , on a (87), d'où (84) :

$$(83) \quad N^*(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{v}, \mathbf{H}; \mathbf{w}, \psi) = -R \int_{\Omega} u_i v_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i} d\Omega \\ + \alpha \int_{\Omega} h_i H_k \frac{\partial w_i}{\partial x_k} d\Omega - \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{H}) \cdot \text{rot } \psi d\Omega,$$

$$(84) \quad N^*(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi) = N(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi),$$

$$(85) \quad (\mathbf{h} \cdot \text{grad}) \mathbf{h} = \text{grad} \left(\frac{h^2}{2} \right) + \text{rot } \mathbf{h} \wedge \mathbf{h},$$

$$(86) \quad -\alpha \int_{\Omega} h_k \frac{\partial h_i}{\partial x_k} w_i d\Omega = -\alpha \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{h} \wedge \mathbf{h}) \cdot \mathbf{w} d\Omega,$$

$$(87) \quad R \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{w} d\Omega - \alpha \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{h} \wedge \mathbf{h}) \cdot \mathbf{w} d\Omega \\ = R \int_{\partial\Omega} n_k u_k u_i w_i dS - R \int_{\Omega} u_i u_k \frac{\partial w_i}{\partial x_k} d\Omega \\ - \alpha \int_{\partial\Omega} n_k h_k h_i w_i dS + \alpha \int_{\Omega} h_i h_k \frac{\partial w_i}{\partial x_k} d\Omega \\ = -R \int_{\Omega} u_i u_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i} d\Omega + \alpha \int_{\Omega} h_i h_k \frac{\partial w_i}{\partial x_k} d\Omega.$$

Supposons qu'il y ait deux solutions $\mathbf{u}^1, \mathbf{h}^1$ et $\mathbf{u}^2, \mathbf{h}^2$ et montrons que leur différence, $\mathbf{u}, \mathbf{h}$, est nulle. En retranchant les deux expressions correspondantes à (51), compte tenu de (84), nous obtenons l'identité

intégrale (88) satisfaite par $\mathbf{u}, \mathbf{h}$, que nous supposons prolongée par zéro pour tout $t < 0$:

$$(88) \quad - \int_0^{\infty} (\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}', \psi')_{\text{H}} dt + \int_0^{\infty} (\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi)_{\text{I}} dt \\ + \int_0^{\infty} \theta(t) L_0(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi) dt + \int_0^{\infty} L_{\eta}(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi) dt \\ + \int_0^{\infty} [M^*(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}^1, \mathbf{h}^1; \mathbf{w}, \psi) - N^*(\mathbf{u}^2, \mathbf{h}^2; \mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{w}, \psi)] dt = 0.$$

Nous définissons à présent une fonction-test qui est, essentiellement, la fonction $\mathbf{u}, \mathbf{h}$ régularisée par convolution de façon à satisfaire les conditions requises pour être fonction-test. Soit ρ_m une suite de fonctions (indice m) indéfiniment dérivables, à support dans $(-\frac{1}{m}, +\frac{1}{m})$, paires avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_m(t) dt = 1$, et $\beta_{n,s}(t)$ la fonction continue définie par (89). $\beta_{n,s}(t)(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ appartient à $L(-\infty, +\infty; V)$; en effectuant son produit de convolution par $\rho_m(t)$, nous la rendons indéfiniment dérivable à support dans $(-\frac{1}{m}, s + \frac{1}{n} + \frac{1}{m})$. Finalement la fonction $\beta_{n,s}[\beta_{n,s}(\mathbf{u}, \mathbf{h}) \star \rho_m]$ est à valeurs dans V (ou H), indéfiniment différentiable par morceaux et continue, et elle peut donc être prise comme fonction-test. En faisant application du fait que ρ_m est pair on démontre ([24], chap. IV, lemme 1.3) l'égalité (90), et (88) devient alors (91) :

$$(89) \quad \begin{cases} \beta_{n,s}(t) = 1 & \text{pour } t < s, \\ \beta_{n,s}(t) = ns + 1 - nt & \text{pour } s < t < s + \frac{1}{n}, \\ \beta_{n,s}(t) = 0 & \text{pour } t > s + \frac{1}{n}; \end{cases}$$

$$(90) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{u}, \mathbf{h}; \beta_{n,s}[\{\beta_{n,s}(\mathbf{u}, \mathbf{h})\} \star \rho_m])' dt = 0;$$

$$(91) \quad - \int_{-\infty}^{+\infty} (\beta'_{n,s}[\mathbf{u}, \mathbf{h}]; [\beta_{n,s}(\mathbf{u}, \mathbf{h}) \star \rho_m]_{\text{H}}) dt \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} (\beta_{n,s}[\mathbf{u}, \mathbf{h}]; [\beta_{n,s}(\mathbf{u}, \mathbf{h}) \star \rho_m]_{\text{I}}) dt \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) L_0(\beta_{n,s}[\mathbf{u}, \mathbf{h}]; \{\beta_{n,s}[\mathbf{u}, \mathbf{h}]\} \star \rho_m) dt \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} L_{\eta}(\beta_{n,s}[\mathbf{u}, \mathbf{h}]; \{\beta_{n,s}[\mathbf{u}, \mathbf{h}]\} \star \rho_m) dt \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} N^*(\beta_{n,s}[\mathbf{u}, \mathbf{h}]; \mathbf{u}^1, \mathbf{h}^1; \{\beta_{n,s}[\mathbf{u}, \mathbf{h}]\} \star \rho_m) dt \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} N^*(\mathbf{u}^2, \mathbf{h}^2; \beta_{n,s}[\mathbf{u}, \mathbf{h}]; \{\beta_{n,s}[\mathbf{u}, \mathbf{h}]\} \star \rho_m) dt = 0.$$

Passons à la limite $m \rightarrow \infty$; la suite ρ_m tend vers la distribution δ et l'on a (92), ce qui permet de passer à la limite dans tous les termes linéaires de (91). Quant aux termes N^* , prenons-en un, par exemple (94) (pas de sommation en i, k); on constate à l'aide de l'inégalité (32) et de la définition de formulation faible que (93) a lieu, nous pouvons alors obtenir en appliquant l'inégalité de Cauchy, la majoration (94). On peut ensuite passer à la limite dans (91) en supprimant simplement ρ_m de tous les termes où elle intervient; nous obtenons ainsi (95) :

$$(92) \quad [\beta_{n,s}(\mathbf{u}, \mathbf{h}) \star \rho_m \rightarrow \beta_{n,s}(\mathbf{u}, \mathbf{h}) \quad \text{dans} \quad L_2(-\infty, +\infty; V) \text{ fort},$$

$$(93) \quad \beta_{n,s} u_i; \quad \beta_{n,s} u_k^1 \in L^4(0, T; L^4(\mathbb{R}^2)) \quad \left(T \geq s + \frac{1}{n} \right),$$

$$(94) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \beta_{n,s} u_i u_k^1 \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} d\Omega dt \\ \left(\int_0^T \|u_i\|_1^4 dt \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|u_k^1\|_1^4 dt \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T \left\| \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \right\|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$(95) \quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_{n,s} \beta'_{n,s} \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_n^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_{n,s}^2 \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_1^2 dt \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) \beta_{n,s}^2 L_0(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}, \mathbf{h}) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_{n,s}^2 L_{\eta}(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}, \mathbf{h}) dt \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_{n,s}^2 [N^*(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}^1, \mathbf{h}^1; \mathbf{u}, \mathbf{h}) + N^*(\mathbf{u}^2, \mathbf{h}^2; \mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}, \mathbf{h})] dt = 0.$$

Faisons à présent tendre n vers l'infini. D'après le théorème de Lusin ([25], n° 46) et (93), le premier terme de (95) tend, presque partout en s , vers le premier terme de (96); le passage à la limite est élémentaire dans les autres termes de (95) et nous obtenons (96) :

$$(96) \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_n^2(s) + \int_0^s \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_1^2 dt + \int_0^s [\theta(t) L_0(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}, \mathbf{h}) \\ + L_{\eta}(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}, \mathbf{h})] dt + \int_0^s [N^*(\mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}^1, \mathbf{h}^1; \mathbf{u}, \mathbf{h}) \\ + N^*(\mathbf{u}^2, \mathbf{h}^2; \mathbf{u}, \mathbf{h}; \mathbf{u}, \mathbf{h})] dt = 0 \quad \text{p. p. en } s.$$

Pour démontrer l'unicité fixons arbitrairement $T > 0$ et démontrons que $\mathbf{u}, \mathbf{h}$ est presque partout nul dans $[0, T]$. Les termes L de (96) peuvent être majorés, en vertu de (37) par l'expression (97), où ε est tel que $C_{0, \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$. Quant aux termes qui forment N^* , l'un quelconque d'entre eux peut être majoré, à l'aide de l'inégalité de Cauchy et de (32), par (98), où u (resp. u^1) désigne n'importe quelle composante de $\mathbf{u}$ ou $\mathbf{h}$ (resp. de $\mathbf{u}^1, \mathbf{h}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{h}^2$). En choisissant alors ε_1 et ensuite ε_2 suffisamment petits, nous

déduisons de (96) l'inégalité (99), où $\varphi(t)$ est une fonction bien déterminée, positive et sommable dans $(0, T)$, d'où $\mathbf{u}, \mathbf{h} = 0$ p. p. en t ; le théorème d'unicité est démontré :

$$(97) \quad C_6(T) \left[\|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_{\mathbf{I}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_{\mathbf{H}}^2 \right],$$

$$(98) \quad C_7 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{u}^1\|_1 \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_1 \leq \frac{C_7}{2} \left(\|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_1 \|\mathbf{u}^1\|_1^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_{\mathbf{I}}^{\frac{1}{2}} \right) \\ \leq \frac{C_7}{2} \left[\left(\frac{\varepsilon_2^2}{2\varepsilon_1^2} + \varepsilon_1^2 \right) \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_{\mathbf{I}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2} \|\mathbf{u}\|_2^2 \|\mathbf{u}^1\|_1^2 \right],$$

$$(99) \quad \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_{\mathbf{H}}^2(s) \leq \int_0^s \varphi(t) \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_{\mathbf{H}}^2 dt; \quad \|\mathbf{u}, \mathbf{h}\|_{\mathbf{H}}^2(0) = 0.$$

7. Continuité par rapport aux données.

L'existence et l'unicité de la solution étant acquises, nous étudions à présent la dépendance par rapport à la vitesse de déplacement $\theta(t)$ du corps. Signalons que d'autres résultats, dans cet ordre d'idées, sont indiqués dans [3].

Nous considérons deux écoulements, $\mathbf{v}, \mathbf{H}$ et $\mathbf{v}^*, \mathbf{H}^*$, correspondant à deux mouvements de vitesses $\theta(t)$ et $\theta^*(t)$ du corps, partant du repos, et nous les étudions en prenant pour tous les deux la même fonction auxiliaire $\mathbf{a}$ (17). Nous désignerons la différence de deux quantités correspondantes aux deux écoulements par le même symbole que chacune de ces deux quantités avec l'indice δ . Dans ces conditions on a (100), et l'étude de la continuité se ramène donc à celui de la convergence de $\mathbf{u}^\delta, \mathbf{h}^\delta$ vers zéro lorsque $\theta^\delta(t)$ tend vers zéro. Elle a lieu dans le sens précis exprimé par le théorème 3 :

$$(100) \quad \begin{cases} \mathbf{h}^\delta = \mathbf{h} - \mathbf{h}^*, \\ \mathbf{v}^\delta = \mathbf{k}, \theta^\delta(t) + \mathbf{e} \theta^\delta(t) + \mathbf{u}^\delta. \end{cases}$$

THÉORÈME 3. — Si T représente une valeur de t arbitrairement fixée, et si $\theta^\delta(t)$ et $\frac{d}{dt} \theta^\delta(t)$ convergent uniformément vers zéro dans $[0, T]$, $\mathbf{u}^\delta, \mathbf{h}^\delta$ convergent vers zéro dans la topologie de $L^\infty(0, T; \mathbf{H})$.

Supposons, par exemple, que étant donnés un mouvement du corps et l'écoulement associé, on perturbe la vitesse de déplacement par $f(\varepsilon) \varepsilon \sin \frac{t}{\varepsilon}$, où $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0$. En faisant tendre ε vers zéro, la perturbation de l'écoulement tend au sens que l'on vient de définir, vers zéro, bien que la fréquence de la perturbation tend vers l'infini. Par ailleurs, on ne saurait pas en déduire des résultats sur le comportement laminaire ou turbulent

du mouvement, surtout compte tenu que tous nos résultats restent dans le cadre des mouvements bidimensionnels.

Nous donnons quelques indications sur la démonstration du théorème 3. Désignons par λ le maximum de $\theta^{\delta}(t)$ et $\theta^{\delta}(t)'$ pour $t \in (0, T)$; en retranchant les expressions (67) correspondantes à la solution approchée du même ordre, m , de η et η' , en faisant la fonction-test égale à $\mathbf{u}^{m\delta}$, $\mathbf{h}^{m\delta}$ et en majorant certaines expressions comme dans la démonstration du théorème d'unicité, nous établissons (101). En utilisant la notation définie par (102)-(104), nous obtenons (105), or, on constate comme dans la démonstration de (93) que $f^m(t)$ possède une borne indépendante de m pour $t \in (0, T)$, d'où l'on déduit la majoration (106) où $F(t)$ est une fonction bien déterminée et bornée, d'où le théorème, en vertu de (80) :

$$(101) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^{m\delta}, \mathbf{h}^{m\delta}\|_{\mathbf{H}}^2 < \lambda K_8 + K_9 \|\mathbf{u}^{m\delta}, \mathbf{h}^{m\delta}\|_{\mathbf{H}}^2 \\ + K_{10} \left(\sum_i \|u_i^{m*}\|_4^4 \right) \|\mathbf{u}^{m\delta}, \mathbf{h}^{m\delta}\|_{\mathbf{H}}^2,$$

$$(102) \quad \gamma^m = \|\mathbf{u}^{m\delta}, \mathbf{h}^{m\delta}\|_{\mathbf{H}}^2,$$

$$(103) \quad f^m = K_{10} \left(\sum_i \|u_i^{m*}\|_4^4 \right),$$

$$(104) \quad \mu(t) = \int_0^t 2[K_9 + f^m(\tau)] d\tau,$$

$$(105) \quad \gamma^m(t) \leq \lambda e^{\mu(t)} \left(\int_0^t 2 K_8 e^{-\mu(\tau)} d\tau \right),$$

$$(106) \quad \gamma^m(t) \leq \lambda F(t).$$

8. Conséquences sur les circulations de la vitesse et du champ magnétique.

Le plan Ox_1x_2 étant réduit aux coordonnées polaires r, ω , et les cercles $\gamma(r)$ de rayon r centrés à l'origine, on a le lemme suivant :

LEMME 4. — Si $f(r, \omega)$ est une fonction vectorielle définie pour $r > r_1$, de carré sommable, on a l'inégalité (107), où $\Gamma(r)$ désigne la circulation de f le long de $\gamma(r)$, définie par (108) :

$$(107) \quad \int_{r > r_1} |\mathbf{f}(r, \omega)|^2 d\Omega \geq \int_{r_1}^{\infty} \frac{\Gamma(r)^2}{2\pi r} dr,$$

$$(108) \quad \Gamma(r) = \int_0^{2\pi} f_{\omega}(r, \omega) r d\omega.$$

Démonstration. — En décomposant $f_{\omega}(r, \omega)$, pour r fixée comme somme de sa moyenne et d'une fonction à intégrale nulle, nous avons (109),

d'où (110) :

$$(109) \quad f_{\omega}(r, \omega) = \frac{\Gamma(r)}{2\pi r} + f_{\omega}^*(r, \omega); \quad \int_0^{2\pi} f_{\omega}^*(r, \omega) r d\omega = 0,$$

$$(110) \quad \int_{r>r_1} |f|^2 d\Omega \geq \int_{r_1}^{\infty} dr \int_0^{2\pi} f_{\omega}^2(r, \omega) r d\omega \\ = \int_{r_1}^{\infty} dr \int_0^{2\pi} \left[\frac{\Gamma(r)^2}{4\pi^2 r^2} + f_{\omega}^{*2} \right] r d\omega \geq \int_{r_1}^{\infty} \frac{\Gamma(r)^2}{2\pi r} dr.$$

Remarquons que (107) implique, dans un certain sens, que $\Gamma(r)$ tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini. Nous exprimerons la propriété (107) en disant qu'une fonction vectorielle appartenant à L_2 possède une « circulation nulle à l'infini ».

Comme les vecteurs auxiliaires **a** (17) et **b** ont une circulation nulle le long des cercles suffisamment grands, le comportement de la circulation est donné par **u**, **h**, qui sont, pour tout t , des fonctions de carré sommable. Cela nous permet d'énoncer le corollaire 1, ou, compte tenu du théorème de Stokes, le corollaire 2, d'interprétation physique plus claire.

COROLLAIRE 1. — *Pour n'importe quel instant t fixé, la vitesse et le champ magnétique ont une circulation nulle à l'infini.*

COROLLAIRE 2. — *Pour n'importe quel instant t fixé, le tourbillon et le courant électrique totaux qui traversent le plan de l'écoulement sont nuls.*

Dans le cas de l'hydrodynamique classique des fluides incompressibles non visqueux, ces résultats sont bien connus : $\Gamma(r)$ est nulle pour r suffisamment grand, car la circulation qui s'établit autour du profil est compensée par la circulation autour du sillage ([26], § 99).

Pour le cas particulier de l'hydrodynamique classique des fluides incompressibles visqueux, le corollaire 1, bien que nouveau à notre connaissance, peut être démontré à l'aide du raisonnement élémentaire qui suit. En étudiant le mouvement par rapport à un repère galiléen lié au fluide à l'infini, le travail total produit par la force qui met le corps en mouvement depuis l'instant initial est égale à l'énergie dissipée par viscosité (non négative) plus les énergies cinétiques du corps et du fluide; cette dernière doit donc être finie, d'où la propriété à cause du lemme 4.

Remarquons qu'un raisonnement faisant intervenir des considérations énergétiques tel que celui que l'on vient de faire dans le cas de l'hydrodynamique ne tient pas dans la magnétohydrodynamique. En effet, en prenant des axes liés à l'infini, le champ magnétique, à la différence de la vitesse, ne se modifie pas (appendice, § 13) et le seul résultat que l'on obtient est que l'accroissement d'énergie magnétique depuis l'instant initial est fini, c'est-à-dire (111), dont on ne déduit pas que **h** soit de carré sommable

$$(111) \quad \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{H}^2 - \mathbf{b}^2) d\Omega = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{h}^2 + 2\mathbf{h} \cdot \mathbf{b}) d\Omega.$$

Remarquons finalement que nos résultats ne sont pas en contradiction avec les études [27]-[30] sur le comportement de la circulation et de la condition de Kutta-Joukowski dans les écoulements magnétohydrodynamiques stationnaires. D'ailleurs, la même situation se présente en hydrodynamique classique : dans l'écoulement stationnaire qui s'établit au bout d'un temps infini, il y a bien une « circulation à l'infini ».

9. Cas du corps conducteur et de la plaque infiniment mince.

Si le corps C est conducteur de l'électricité, sa conductibilité étant σ fois celle du fluide, l'équation (8) est remplacée par (112), et, puisque le courant électrique n'est pas, en général, nul dans C , nous sommes amenés à définir l'ensemble $J_2(\Omega)$ comme celui des fonctions ψ définies par (27) où γ est, cette fois-ci indéfiniment dérivable à support compact dans R^2 et vérifiant (25). Les produits scalaires (34) et (35) reçoivent le terme nouveau (113). Tous les résultats des paragraphes 3-8 ont encore lieu pour le cas du corps conducteur; les intégrations par parties pour obtenir la formulation faible sont souvent différentes, du fait que $\text{rot } \mathbf{h}$ et $\text{rot } \psi$ ne sont pas, en général, nuls dans C :

$$(112) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \sigma R_m \mathbf{E} \quad \text{dans } C,$$

$$(113) \quad \frac{\alpha}{\sigma R_m} \int_C \text{rot } \mathbf{h} \cdot \text{rot } \psi \, d\Omega.$$

Remarquons que, à la différence de ce qui se passe dans les problèmes stationnaires ([1], n° 8), la régularité de la frontière ne joue aucun rôle (sauf pour l'interprétation des conditions aux limites au sens des traces), et que les résultats sont, en particulier, valables pour des corps à « bord de fuite anguleux ». Pour la même raison, le cas où le corps est une plaque d'épaisseur nulle n'est qu'un cas particulier des problèmes étudiés ici. L'écoulement étant bidimensionnel, aucun courant électrique ne traverse la plaque, et sa conductibilité n'a aucune influence : les cas de corps conducteur et isolant coïncident.

10. Cas tridimensionnel.

Dans le cas tridimensionnel, où, notamment, l'inégalité (32) n'a plus lieu, nous avons obtenu seulement l'existence, mais non l'unicité, celle-ci n'étant d'ailleurs même pas acquise dans le cas de l'hydrodynamique classique pour les solutions faibles ([14], [15]).

La seule modification à introduire dans la formulation classique du problème par rapport au cas bidimensionnel consiste à remplacer (15) par

$$(114) \quad E_t \text{ est continu sur } \Gamma.$$

Nous démontrons un lemme qui joue un rôle important dans la formulation faible du problème. Il introduit une différence fondamentale avec le cas bidimensionnel; en effet, la condition équivalente à (25) est automatiquement satisfaite sans qu'il soit nécessaire de l'imposer explicitement, et les considérations sur le comportement de la circulation n'ont plus lieu.

LEMME 5. — Soit $\gamma(x_1, x_2, x_3)$ une fonction vectorielle, indéfiniment dérivable, à divergence nulle et support compact. Alors, elle satisfait (115) :

$$(115) \quad \int_{R^3} \gamma \, d\Omega = 0.$$

Démonstration. — Nous construisons, à l'aide de la loi de Biot-Savart tridimensionnelle (116), la fonction ψ , dont la divergence est nulle et le rotationnel γ . Désignons par D un domaine contenant le support de γ et soit A un potentiel vecteur à divergence nulle (117) quelconque de γ . En intégrant par parties nous avons (118). Cherchons un potentiel vecteur A particulier tel qu'il satisfasse la condition (119). Nous construisons un tel vecteur de la forme (120), qui satisfait automatiquement (117). La condition (119) devient (121). Montrons que (121) définit, à une constante additive près, les valeurs de φ sur ∂D . En effet, la condition d'intégrabilité de (121) est que l'intégrale de ψ_T le long de n'importe quel cycle fermé c , contenu dans ∂D soit nulle. Or, en désignant par Σ la partie de ∂D limitée par c , nous avons (122) à cause que ∂D est en dehors du support de γ , et la condition d'intégrabilité est bien vérifiée. φ peut alors être construite (solution du problème de Dirichlet) dans D et A satisfaisant (119) existe, d'où (115) :

$$(116) \quad \psi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\gamma(x) \wedge (y - x)}{|y - x|^3} d\Omega,$$

$$(117) \quad \operatorname{div} A = 0; \quad \operatorname{rot} A = \gamma,$$

$$(118) \quad \int_D \gamma \, d\Omega = \int_D \varepsilon_{ijk} k_l \frac{\partial \Lambda_k}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\partial D} \varepsilon_{ijk} k_l n_j A_k dS,$$

$$(119) \quad A_T|_{\partial D} = 0 \iff \varepsilon_{ijk} k_l n_j A_k|_{\partial D} = 0,$$

$$(120) \quad A = \psi + \nabla \varphi; \quad \Delta \varphi = 0,$$

$$(121) \quad (\nabla \varphi)_T = -\psi_T,$$

$$(122) \quad \oint_c \psi_T \cdot d\mathbf{r} = \int_\Sigma \operatorname{rot} \psi \cdot \mathbf{n} \, dS = 0.$$

Dans le cas tridimensionnel, $J(\Omega)$ est formé par les vecteurs ψ construits par la loi de Biot-Savart (116), γ étant un vecteur indéfiniment dérivable, à divergence nulle et support compact dans Ω ou dans R^3 suivant que le corps est isolant ou conducteur). ψ décroît à l'infini,

d'après (116), comme r^{-2} , il est donc de carré sommable dans R^3 , et les produits scalaires de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{V}$ peuvent être définis comme dans le cas bidimensionnel sans qu'il soit nécessaire d'améliorer la décroissance à l'infini en faisant usage du lemme 5.

Nous explicitons, comme un exemple d'application de ce lemme, l'élimination du champ électrique pour obtenir la formulation faible dans le cas de corps conducteur. Si ψ est une fonction-test de J_2 , nous multiplions (5) par $\int_{R_m} \mathbf{rot} \psi$ et (112) par $\frac{\alpha}{\sigma R_m} \mathbf{rot} \psi$ et nous intégrons. Les termes contenant le champ électrique $\mathbf{E}$ peuvent être transformés comme le montre (123). Les fonctions qui y interviennent sont, éventuellement, discontinues sur Γ , ce dont il faudra tenir compte en intégrant par parties. $\partial\Omega$ désigne, en général, le contour Γ du corps avec la normale intérieure à celui-ci plus la « sphère de l'infini », interprétée par un passage à la limite évident. En intégrant par parties et en faisant usage de (6) et (9), nous obtenons (123). Constatons que l'intégrale de surface de son second membre s'annule. En effet, la surface $\partial C = \Gamma$ est parcourue deux fois avec des vecteurs normaux opposés; comme ψ et $\mathbf{E}_T$ (seules composantes de $\mathbf{E}$ qui y interviennent) sont continues à cause de (114), il suffit de constater que le premier membre de (125) est nul. En faisant la décomposition (124) et, compte tenu de (115) et du fait que ψ décroît à l'infini comme r^{-2} , on a (125),

C. Q. F. D.

$$(123) \quad \int_{R^3} \alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \psi \, d\Omega = \alpha \int_{\partial\Omega \cup \partial C} \varepsilon_{ijk} n_j E_i \psi_k \, dS \\ + \alpha \int_{R^3} \varepsilon_{kjl} \psi_k \frac{\partial E_l}{\partial x_j} \, d\Omega = \alpha \int_{\partial\Omega \cup \partial C} \varepsilon_{ijk} n_j E_i \psi_k \, dS \\ - \alpha \int_{R^3} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \cdot \psi \, d\Omega,$$

$$(124) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}|_{\infty} + \mathbf{E}' = -\theta(t) \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{H}|_{\infty} + \mathbf{E}'; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E}' = 0,$$

$$(125) \quad \int_{\partial R^3} \varepsilon_{ijk} n_j E_i \psi_k \, dS = \mathbf{E}|_{\infty} \int_{\partial R^3} \mathbf{n} \wedge \psi \, dS \\ + \int_{\partial R^3} \mathbf{E}' \cdot (\mathbf{n} \wedge \psi) \, dS = \mathbf{E}|_{\infty} \int_{\partial R^3} \mathbf{rot} \psi \, d\Omega = 0.$$

Quant au passage de la formulation faible à la formulation classique, la seule différence importante par rapport au cas bidimensionnel (§ 4.2) est la suivante. On considère une solution faible possédant, en plus des hypothèses de régularité locale habituelles, $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}$ décroissant à l'infini comme $r^{-1-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), exigence qui n'est pas très forte étant donné que $\mathbf{h} \in L^2(R^2)$. On construit alors le vecteur auxiliaire $\mathbf{E}'$ satisfaisant (55) par la loi de Biot-Savart, ce qui est loisible car $\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0$. Une étude

semblable à celle de [31], chap. XI, montre que E^* ainsi construite décroît à l'infini comme r^{-2} , ce qui suffit pour faire une transformation analogue à (58) et obtenir (126) qui remplace (59), et qui a lieu pour toute fonction-test $\text{rot } \psi$ indéfiniment dérivable, à divergence nulle et support compact. Le lemme 1 montre alors que le crochet est le gradient d'une fonction φ appartenant à $W_2^1(B)$ pour tout B borné. En définissant alors $\mathbf{E}$ par (127), on voit qu'elle satisfait (5) et (112), ainsi que (114) dans un sens généralisé :

$$(126) \quad \int_{\Omega} [\text{rot } \mathbf{H} - R_m (\mathbf{E}^* + \mathbf{v} \wedge \mathbf{H})] \cdot \text{rot } \psi \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{H} - R_m \mathbf{E}^* \right] \cdot \text{rot } \psi \, d\Omega = 0,$$

$$(127) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^* + R_m^{-1} \text{grad } \varphi.$$

Dans ces conditions nous démontrons l'existence d'une solution faible (au moins), définie comme au paragraphe 4.2.

Remarquons que la continuité du champ magnétique à la traversée de la surface du corps entraîne celle de la composante normale de son rotationnel, et donc du courant électrique. Les équations et conditions aux limites considérées ne peuvent donc pas rendre compte de la formation d'une distribution surfacique de charge électrique, qui semble, néanmoins exister dans les problèmes stationnaires sans symétrie axiale [32]. Cette situation se présente déjà dans l'électromagnétisme ([33], chap. VII, § 45), lorsqu'on néglige, comme dans l'approximation magnétohydrodynamique, le courant de déplacement de Maxwell. Ce phénomène ne se présente d'ailleurs pas dans le cas bidimensionnel.

11. Cas du nombre de Reynolds magnétique nul.

L'équation (5) montre que, si le nombre de Reynolds magnétique R_m est petit, $\text{rot } \mathbf{H}$ le sera aussi, et le champ magnétique sera proche du champ imposé, $\mathbf{b}$, et, à la limite $R_m \rightarrow 0$ on peut supposer $\mathbf{H} = \mathbf{b}$. Si le produit $\alpha R_m = M^2$ (carré du nombre de Hartmann) tend vers une constante différente de zéro, le dernier terme du premier membre de (4) ne sera pas nul à la limite, et il y aura une action magnétique sur l'écoulement. L'étude de ce problème n'est pas un cas particulier de celui qui précède, car, si $R_m = 0$, les produits scalaires (34) et (35) deviennent illusoires.

Le problème aux limites correspondant au cas $R_m = 0$ a été étudié dans [34], où l'on démontre, comme ici, l'existence d'une solution faible et, dans le cas bidimensionnel, son unicité. Les résultats de [34] complètent donc ceux que nous exposons ici.

12. Conclusions et comparaisons avec les résultats d'autres auteurs.

A la différence de ce qui se passe dans le cas stationnaire [1], où nous n'avons démontré l'existence de l'écoulement autour d'un corps que pour des nombres de Reynolds magnétiques suffisamment petits, les résultats de [2], [3] et de cet article sont aussi bons qu'on pouvait l'espérer : pour les problèmes envisagés, les théorèmes d'existence et unicité des équations de Navier-Stokes ont été étendus à la magnétohydrodynamique.

De notre point de vue, un théorème d'existence et d'unicité exprime le fait que les données mathématiques du problème constituent un modèle approprié du déterminisme physique. Or, les données de notre problème (mouvement du corps et champ magnétique à l'infini) ainsi que, d'une façon moins évidente, celles de [2] et [3], peuvent être imposées arbitrairement dans une expérience et il est naturel de supposer qu'elles déterminent d'une façon unique le processus physique correspondant. Une pareille affirmation ne saurait pas être faite pour les problèmes traités par les auteurs ([5]-[9]), qui se donnent comme condition aux limites le champ magnétique sur la surface qui limite le domaine D où l'on cherche la solution et qui utilisent la loi d'Ohm non classique,

$$(128) \quad \mathbf{J} = R_m (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) + \mathbf{J}_0; \quad \text{rot rot } \mathbf{J}_0 = 0,$$

qui est associée, dans la formulation faible à ladite condition aux limites. Il n'est nullement évident qu'une telle condition aux limites puisse être imposée arbitrairement, et, en particulier, cela est impossible dans le cas de la magnétostatique dans un milieu isolant : la recherche de $\mathbf{H}$ en connaissant sa valeur à la frontière équivaut à la solution de l'équation de Laplace avec données de Dirichlet et de Neumann à la fois. Par ailleurs, dans les travaux [5]-[9], aucun milieu non conducteur n'est présent

Il nous semble donc que nos résultats apportent un argument pour l'adoption de la loi d'Ohm classique (5) au lieu de (128). Par ailleurs, la loi d'Ohm classique n'est qu'une approximation d'une loi plus complexe (voir [35], III-2), mais nous ne pensons pas que l'on puisse faire appel à un courant indépendant de champ électrique local et dû à l'état d'ionisation du milieu alors qu'il est déterminé sans connaître cet état; nous montrons seulement que l'ensemble d'équations et conditions aux limites de la magnétohydrodynamique classique forment un ensemble cohérent, au moins pour le problème considéré ici.

13. Appendice : Établissement des équations dans un repère non galiléen.

La magnétohydrodynamique classique étant une théorie non relativiste et le courant de déplacement de Maxwell y étant négligé, l'invariance des équations de l'électromagnétisme par rapport aux changements de

repère ne peut pas y être admise *a priori*. Nous faisons un raisonnement élémentaire qui, sans sortir des idées non relativistes, nous permet d'obtenir simultanément les changements à réaliser dans les équations de l'électromagnétisme (3), (5), (6) et de la dynamique (2), (4). D'ailleurs, si l'on écrit la transformation de Lorentz sous forme adimensionnelle et si l'on néglige la vitesse par rapport à celle de la lumière, on retrouve les formules de passage (131) ci-après.

Considérons un repère galiléen $Ox'_1x'_2x'_3$ et un autre $Ox_1x_2x_3$ qui se déplace avec la vitesse non uniforme $-\theta(t)\mathbf{k}_1$ par rapport au premier. La perméabilité magnétique étant partout égale à celle du vide, il n'y a pas de polarisation, et tous les phénomènes sont régis par $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$. Considérons une charge électrique-test en mouvement avec la vitesse $\mathbf{v}'$ ($\mathbf{v}$ dans les axes non galiléens) la force électromagnétique adimensionnelle qui agit sur la charge, indépendante du repère, a les expressions (130). Y faisant en particulier $\mathbf{v} = 0$ et après $\mathbf{v} = \mathbf{k}_3$, on a les formules de passage (131) :

$$(129) \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \theta(t)\mathbf{k}_1,$$

$$(130) \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} = \mathbf{E}' + \mathbf{v}' \wedge \mathbf{H}' = \mathbf{E}' + (\mathbf{v} - \theta\mathbf{k}_1) \wedge \mathbf{H}',$$

$$(131) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}' - \theta\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{H}'; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}'.$$

Si nous considérons maintenant les équations et conditions aux limites de la magnétohydrodynamique écrites dans les variables galiléennes ('), et y faisons le changement de variables dépendantes (129), (131) et indépendantes (132), nous constatons que les équations transformées sont celles de départ à cette différence près que dans l'équation de la dynamique (4) il faut ajouter la force d'inertie; or, comme elle dérive d'un potentiel, elle peut être englobée avec la pression (133) :

$$(132) \quad t = t'; \quad x_1 = x'_1 + \int_0^t \theta(\tau) d\tau; \quad x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3;$$

$$(133) \quad -\text{grad } p + R\theta'(t)\mathbf{k}_1 = -\text{grad } p^*; \quad p^* = p - R\theta'(t)x_1.$$

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] SANCHEZ-PALENCIA E., *Existence de solutions de certains problèmes aux limites en Magnétohydrodynamique* (J. Méc., vol. 7, 1968, p. 405-426).
- [2] LADYZHENSKAYA O. A. et SOLONNIKOV V. A., *Sur la résolubilité des problèmes non stationnaires de la Magnétohydrodynamique* (en russe) (Dokl. Akad. Nauk, vol. 124, 1959, p. 26-28).
- [3] LADYZHENSKAYA O. A. et SOLONNIKOV V. A., *Solution de certains problèmes non stationnaires de la Magnétohydrodynamique des fluides visqueux incompressibles* (en russe) (Trudy Mat. Inst. Steklova, vol. 59, 1960, p. 115-173).
- [4] AUBIN J. P., *Étude d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires* (C. R. Acad. Sc., t. 256, 1963, p. 350-352).

- [5] LASSNER G., *Ueber ein Rand- Anfangswertproblem der Magnetohydrodynamik* (Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 25, 1967, p. 388-405).
- [6] DYER R. H. et EDMUNDS D. E., *On the existence of solutions of the equations of Magnetohydrodynamics* (Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 9, 1962, p. 403-410).
- [7] EDMUNDS D. E., *Sur les équations différentielles de la Magnétohydrodynamique* (C. R. Acad. Sc., t. 254, 1962, p. 4248-4250).
- [8] FÖRSTE J., *Ein Existenzsatz für stationäre Strömungen in der Magnetohydrodynamik* (Monatsber. Deuts. Akad. Wissens., Berlin, vol. 6, 1964, p. 896-994).
- [9] FÖRSTE J., *Zum Stationären magnetohydrodynamischen Umströmungsproblem* (Monatsber. Deuts. Akad. Wissens., Berlin, vol. 7, 1965, p. 1-6).
- [10] KANWAL R. P., *Uniqueness of magnetohydrodynamics flows* (Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 4, 1959-1960, p. 335-340).
- [11] FERRARI I., *Sui un teorema de unicita per le equazioni del Idromagnetismo* (Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, vol. 9, 1960, p. 205-217).
- [12] DYER R. H. et EDMUNDS D. E., *A uniqueness theorem in Magnetohydrodynamics* (Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 8, 1961, p. 254-262).
- [13] FERRARI I., *Sur un théorème d'unicité pour les équations magnétohydrodynamiques des fluides* (Int. Congress Math., Abs. short Comm., Stockholm, 1962, p. 182-183).
- [14] LADYZHENSKAYA O. A., *The Mathematical Theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New-York, 1963.
- [15] LIONS J. L., *Quelques résultats d'existence dans des équations aux dérivées partielles non linéaires* (Bull. Soc. math. Fr., t. 87, 1959, p. 245-273).
- [16] LIONS J. L. et PRODI G., *Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2* (C. R. Acad. Sc., t. 248, 1959, p. 3519-3521).
- [17] SANCHEZ-PALENCIA E., *Existence et unicité de certains écoulements non stationnaires satisfaisant une propriété de circulation* (C. R. Acad. Sc., t. 266, série A, 1968, p. 683-685).
- [18] CABANNES H., *Magnétohydrodynamique des fluides*, Centre Doc. Univ., Paris, 1965.
- [19] NEČAS J., *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson-Academia, Paris-Prague, 1967.
- [20] CABANNES H., *Cours de Mécanique générale*, Dunod, Paris, 1966.
- [21] VALIRON G., *Équations fonctionnelles*, Masson, Paris, 1950.
- [22] HOPF E., *Ueber die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen* (Math. Nachricht., vol. 4, 1950-1951, p. 213-231).
- [23] SOBOLEV S. L., *Some applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Am. Math. Soc. Providence, 1963.
- [24] LIONS J. L., *Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*, Springer, Berlin, 1961.
- [25] RIESZ F. et NAGY B. SZ., *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars et Akademiai Kiado, Paris-Budapest, 1965.
- [26] PRANDTL L. et TIETJENS O. G., *Applied Hydro- and Aeromechanics*, Dover, New-York, 1957.
- [27] LARY E. C., *A theory of thin airfoils and slender bodies in fluids of finite electrical conductivity with aligned fields* (J. Fluid. Mech., vol. 12, 1962, p. 209-226).
- [28] STEWARTSON K., *On the Kutta-Jokowsky condition in Magneto-fluid-dynamics* (Proc. Roy. Soc., série A, vol. 277, n° 1368, 1964, p. 107-124).
- [29] KUSUKAWA Ken-ichi, *On the Kutta-Joukovsky condition in Magnetohydrodynamics* (J. Phys. Soc. Japan, vol. 19, 1964, p. 1031-1041).

- [30] BUSEMAN A., *Lift control in Magnetohydrodynamics*, P. M. M. (*J. Appl. Math. Mech.*, vol. 28, 1964, p. 328-341).
- [31] SOBOLEV S. L., *Partial differential equations in Mathematical Physics*, Pergamon Oxford, 1964.
- [32] GOTOH K., *Stokes flow on an electrically conducting fluid in an uniform magnetic field* (*J. Phys. Soc. Japan*, vol. 15, 1960, p. 696-705).
- [33] LANDAU L. D. et LIFSCHITZ E. M., *Electrodynamics of continuous media*, Pergamon, Oxford, 1960.
- [34] SANCHEZ-PALENCIA E., *Théorèmes d'existence et d'unicité pour certains écoulements non stationnaires à nombre de Reynolds magnétique nul* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 264, série A, 1967, p. 363-366).
- [35] SEARS W. R. et RESLER E. L., *Magneto-aerodynamic flow past bodies* (*Adv. Appl. Mech.*, vol. 8, 1964, p. 1-68).

(Manuscrit reçu le 31 janvier 1969.)

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

180778-70

Dépôt légal, Imprimeur, 1970, n° 1912

Imprimé en France